

结合信号谐波特性的均值参数测量窗设计

陈砚圃¹, 解云虹², 周秦武³, 丁海洋²

(1. 西京学院信息工程学院, 710123, 西安; 2. 国防科技大学信息通信学院试验训练基地, 710106, 西安;
3. 西安交通大学生物医学信息工程教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 为了有效抑制准周期信号均值类参数测量时由信号频率的起伏变化和对信号的非同步采样引入的误差,对加窗函数采用组合余弦表示并结合周期信号频谱的谐波特性,提出了一种用于准周期信号均值类参数高精度测量的加窗函数设计方法。首先,基于测量误差在采样同步时为零,并对采样不同步不敏感,分别导出了组合余弦窗的有效条件及其优化设计的平坦性准则;进而以平坦性准则为约束建立了组合余弦窗的系数方程组;最后通过求解方程组确定组合余弦窗的系数,实现了组合余弦窗的优化设计。采用优化组合余弦窗对信号加窗,能够最大限度地抑制各谐波之间的泄漏干扰,显著降低了均值类参数的测量误差。基于组合余弦窗的平坦性准则对广为应用的矩形卷积窗的最优性进行了分析,揭示出在各信号谐波频点处矩形卷积窗的频谱满足相同的平坦性。对典型信号有效值的测量进行数值模拟表明:信号频率在±10%之内起伏变化时,与同宽的矩形卷积窗相比,采用窗宽为 2 个和 3 个信号周期的优化组合余弦窗后测量精度分别提高了 11 倍和 27.5 倍以上。

关键词: 参数测量;非同步采样;频谱泄漏;矩形卷积窗;组合余弦窗

中图分类号: TN911.6 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202205019 **文章编号:** 0253-987X(2022)05-0191-08



OSID 码

Designing Mean Parameter Measurement Window Based on
Signal Harmonic Characteristics

CHEN Yanpu¹, XIE Yunhong², ZHOU Qinwu³, DING Haiyang²

(1. College of Information Engineering, Xijing University, Xi'an 710123, China; 2. Information and Communications
Institute, National University of Defense Technology, Xi'an 710106, China; 3. Key Laboratory of Biomedical
Information Engineering of Ministry of Education, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To control the errors caused by the frequency fluctuation and non-synchronous sampling in measuring mean parameters of the quasi-periodic signal, the window function is represented by combined cosines, and a window function design approach for precisely measuring mean parameters of the quasi-periodic signal is proposed here based on harmonic characteristics of the periodic signal spectrum. Firstly, effective conditions for a combined cosine window and flatness criteria for its optimization design are derived respectively on the basis that the measurement error is zero in the case of synchronous sampling and is insensitive to non-synchronous sampling. And then, the equations for the coefficient of the combined cosine window are created with the constraint of flatness criteria. Finally, these equations are solved to determine the coefficient, thus optimizing the design of the combined cosine window. By

windowing the signal with the optimized combined cosine window, it can minimize the leakage interference between harmonics and significantly reduce the measurement error of mean parameters. Widely used rectangular convolution windows are analyzed for optimality based on the flatness criteria, and the analysis results show that the spectra of all these windows are equally flat at each signal harmonic frequency. The numerical simulation of typical signal RMS measurement shows that when the signal frequency fluctuates within $\pm 10\%$, compared with the rectangular convolution window of the same width, the measurement accuracy is improved by more than 11 times and 27.5 times respectively after using the optimized combined cosine windows with the widths of 2 and 3 signal periods.

Keywords: parameter measurement; non-synchronous sampling; spectral leakage; rectangular convolution window; combined cosine window

周期信号(实际中为周期和幅度均随时间变化的准周期信号)是人类活动中广为应用的一类信号,如电网电压与电流信号,广播、通信和雷达等各类无线电设备发射的电波信号,引擎与马达发出的振动信号等等。周期信号参数的实时、准确测量是电子测量的基本内容,是设备工作状态分析与故障诊断的重要依据。均值参数是一类重要参数,其计算的核心环节为求信号的均值,如周期信号的有效值、功率及功率的导出参数等均属于周期信号的均值参数^[1-6]。基于信号采样法对周期信号均值参数的测量主要有同步采样法^[6-8]和非同步采样法^[9]。本文研究非同步采样法,通过加窗函数的优化设计实现非同步测量误差的有效抑制。均值参数非同步测量的主要步骤为信号的周期预估、采样、截取与加窗求均值。由于采样周期只能取整数个时钟周期,因而信号的截取和采样均与信号周期不同步,这将导致均值参数的测量误差。为了方便,在频域中对周期信号均值参数的测量误差进行分析。信号在时域中的加窗和非同步采样,在频域中分别表现为频谱泄漏和栅栏效应^[10-14],二者均会导致谐波测量误差。为了抑制加窗引起的频谱泄漏,人们针对不同应用背景和需求下的信号分析构建了一系列窗函数^[10-18]。为了抑制非同步采样引起的栅栏效应,采用了多谱线插值^[19-23]以及构造平顶窗^[24-25]等多种方法。信号均值在频域中对应直流分量,而直流分量的频域采样不存在栅栏效应,对其测量误差的分析只需考虑基波和各次谐波在直流分量处的泄漏干扰。研究发现对信号多次平均可有效抑制非同步采样法的均值测量误差,且多次平均与矩形卷积窗加权等价^[11-13]。仿真表明相对于其他同宽的窗函数,基于矩形卷积窗对周期信号进行加权时基波和各次谐波在直流分量处的泄漏很小,特别适用于周期信

号均值类参数的测量,但矩形卷积窗的最优性尚待研究。

信号分析中的各种加窗函数均可视为不同窗系数加权的组合余弦窗^[23]。传统的窗函数在设计时并没有结合信号频谱的特性,主要基于窗函数频谱的最大旁瓣峰值最小和远程衰减快等约束条件建立窗系数方程组^[10,22]。本文针对周期信号均值参数的测量,基于窗函数的组合余弦模型并结合周期信号频谱的谐波结构特性,研究组合余弦窗满足的有效条件及构建时的优化准则,建立并求解窗系数方程组进而完成窗函数的设计。另外,对基于矩形卷积窗均值测量的最优性进行了理论分析。

1 组合余弦窗加权测量分析

1.1 周期信号的均值类参数

计算周期信号均值参数时的均值项通常不是原周期信号的均值,而是运算过程中某一周期相同的中间信号的均值^[1-6]。均值参数计算的关键是算出中间信号的均值,如计算交流电压有效值的关键就是计算交流电压的平方信号(中间信号)的均值。设中间信号用 $g(t)$ 表示,其周期为 T ,则均值 d 可表示为在整数个周期(pT)内信号的平均

$$d = \frac{1}{pT} \int_{t-pT/2}^{t+pT/2} g(\tau) d\tau \quad (1)$$

实际中由于信号的截取和采样与信号周期不同步,计算时只能用预估周期 T_0 。替代式中的实际周期 T ,得到均值的近似值

$$\hat{d}(t) = \frac{1}{pT_0} \int_{t-pT_0/2}^{t+pT_0/2} g(\tau) d\tau \quad (2)$$

该均值测量是时间的函数,称为均值测量信号。

1.2 组合余弦窗及其有效条件

计算均值的更一般的表示形式为基于宽度为

T_w 的窗函数 $w(t)$ 对信号加权

$$\hat{d}(t) = \int_{t-T_w/2}^{t+T_w/2} g(\tau)w(\tau-t)d\tau \quad (3)$$

$w(t)$ 通常为偶函数。不失一般性,将窗函数表示为由直流分量和 M 个余弦分量组成的组合余弦窗的形式^[23],即

$$w(t) = \frac{1}{T_w} r_1\left(\frac{t}{T_w}\right) \sum_{m=0}^M w_m \cos\left(m \frac{2\pi}{T_w} t\right) = \frac{1}{T_w} r_1\left(\frac{t}{T_w}\right) \sum_{m=-M}^{+M} \bar{w}_m e^{jm \frac{2\pi}{T_w} t} \quad (4)$$

其中 $r_1(t)$ 为归一化矩形函数

$$r_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

w_m 为组合余弦窗的系数。

取式(4)的傅里叶变换,组合余弦窗的频谱为

$$W(f) = \sum_{m=-M}^{+M} \bar{w}_m \frac{\sin(\pi f T_w - m\pi)}{\pi f T_w - m\pi} \quad (6)$$

一个组合余弦窗的具体形式决定于窗宽 T_w 、余弦分量的个数 M 以及各窗系数 w_m 的取值。为了分析组合余弦窗用于周期信号均值测量的有效性,首先分析均值测量无误差时组合余弦窗须满足的有效条件。

将信号 $g(t)$ 展开为有限项正弦级数

$$g(t) = d + \sum_{k=1}^K a_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t + \phi_k\right) = \sum_{k=-K}^K \bar{a}_k e^{j\frac{2\pi k}{T} t} \quad (7)$$

其傅里叶变换为

$$G(f) = \sum_{k=-K}^K \bar{a}_k \delta(f - k/T) \quad (8)$$

实际上式(3)给出的均值测量信号恰好是 $g(t)$ 与 $w(t)$ 的卷积,故均值测量信号的频谱为

$$\hat{D}(f) = \sum_{k=-K}^K \bar{a}_k \left[\sum_{m=-M}^{+M} \bar{w}_m \frac{\sin(\pi k T_w / T - m\pi)}{\pi k T_w / T - m\pi} \right] \delta(f - k/T) \quad (9)$$

均值测量的误差决定于均值测量信号中的交流分量,即 $k \neq 0$ 的各次谐波分量。假设均值测量信号中的各次谐波能够完全得以抑制,且直流分量与被测信号的直流分量相等,对上式进行分析可得到用于均值测量的组合余弦窗的有效条件。

(1)组合余弦窗的窗宽为信号周期的整数倍,即

$$T_w = pT \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

这一条件表明,窗函数频谱在信号各次谐波频点的值为0。

(2)组合余弦窗中谐波次数为 p 的整数倍的窗系数为0,即

$$w_m = 0 \quad m \bmod p = 0 \text{ 且 } m \neq 0 \quad (11)$$

这一条件表明,组合余弦窗中不含与信号谐波同频的余弦分量。

(3)组合余弦窗为单位面积的窗函数,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t) dt = 1 \quad (12)$$

该条件可使均值测量信号的直流分量与中间信号的直流分量相等。

以上为组合余弦窗的有效条件。只有组合余弦窗满足以上3个条件,才能准确算出周期信号的均值。

1.3 均值参数测量的误差分析

实际中在构建组合余弦窗时,只能用信号的预估周期 T_0 替代信号的实际周期 T ,因而组合余弦窗的有效条件表现为 $T_w = pT_0$ 、 $w_0 = 1$ 以及不含与预估谐波频率(k/T_0)相同的余弦分量。在式(4)中引入有效组合余弦窗条件,得

$$w(t) = \frac{1}{pT_0} r_1\left(\frac{t}{pT_0}\right) \left\{ 1 + \sum_{m=1}^M w_m \cos\left(m \frac{2\pi}{pT_0} t\right) \right\} = \frac{1}{pT_0} r_1\left(\frac{t}{pT_0}\right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M w_m \left[e^{jm \frac{2\pi}{pT_0} t} + e^{-jm \frac{2\pi}{pT_0} t} \right] \right\} \quad (13)$$

其傅里叶变换为

$$W(f) = \frac{\sin(\pi p T_0 f)}{\pi p T_0 f} \left[1 + \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^m w_m}{1 - (m/pT_0 f)^2} \right] \quad (14)$$

在一般情况下预估周期 T_0 虽然不等于信号周期 T ,但二者非常接近。为了定量分析因信号的截取和采样与信号周期不同步带来的均值测量误差,引入相对频偏^[12]

$$\nu = (f - f_0)/f_0 = (T_0 - T)/T \quad (15)$$

该式中 f 和 f_0 分别为周期信号的实际频率和预估频率。再利用信号第 k 次谐波的频率 $f_k = k/T$,则均值测量信号的频域表示式(9)可写为

$$\hat{D}(f) = \sum_{k=-K}^K \alpha_{p,k}(\nu) \bar{a}_k \delta(f - k/T) \quad (16)$$

其中 $\alpha_{p,k}$ 为信号第 k 次谐波的衰减因子

$$\alpha_{p,k}(\nu) = \frac{(-1)^{kp} \sin(kp\pi\nu)}{kp\pi(1+\nu)} \left[1 + \sum_{m=1}^{+M} \frac{(-1)^m w_m}{1 - (m/kp(1+\nu))^2} \right] \quad (17)$$

对式(16)进行傅里叶反变换,均值测量的时域形式为

$$\hat{d}(t) = d + \sum_{k=1}^K \alpha_{p,k}(\nu) a_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t + \phi_k\right) \quad (18)$$

式中右边第二项为 t 时刻的测量误差。用均值测量信号随时间变化的标准差表示均值参数的测量误差,再利用各次谐波之间的正交性可得测量误差为

$$\sigma_p(\nu) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \alpha_{p,k}^2(\nu) a_k^2} \quad (19)$$

2 窗函数的优化设计

满足均值测量有效条件的组合余弦窗可使相对频偏为 0 时的均值测量误差为 0,但实际中相对频偏不为 0,因而均值测量误差也不为 0。组合余弦窗的设计就是在误差最小的原则下确定组合余弦窗的系数,为此需首先给出组合余弦窗的优化准则及其相应的数学表示。在进行一般信号的频谱分析时,文献中通常以窗函数频谱的旁瓣峰值最小以及旁瓣的远程衰减最快作为优化准则,这在一般意义上可以最大限度地抑制各频谱分量之间的相互泄漏,但若用于周期信号均值参数测量,组合余弦窗的优化准则尚待研究。

周期信号的主要结构特点是谐波性,其频谱为分布于各谐波频点($f_k = k/T$)上的离散谱。实际中的非同步采样虽然存在相对频偏,但预估周期非常接近信号的实际周期,周期信号的各次谐波频率只在以各次谐波预估频率(k/T_0)为中心的邻域内变化。为了有效抑制周期信号的均值测量误差,在以各次谐波预估频率为中心的邻域内均值测量信号的频谱幅值越小越好,这等同于组合余弦窗在满足均值测量有效条件的基础上其频谱在各次谐波预估频点满足平坦性。可见,在进行周期信号均值参数测量时,所选的加窗函数的频谱只需在各次谐波预估频点的邻域内最小,而不必关心在其他频域处的取值。综上所述,面向周期信号均值测量的组合余弦窗的优化准则为:窗函数的频谱在信号谐波频点的值为 0 且满足平坦性。

函数在一点平坦意味着函数在该点的邻域内为频偏的高阶无穷小量。无穷小量的阶数可用于函数平坦性度量,阶数越高则函数在该点的平坦性越好,因此窗宽为 p 个周期的窗函数的优化设计准则可描述为

$$\begin{cases} W'(k/T_0) = 0 \\ W''(k/T_0) = 0 \\ \vdots \\ W^{(n_k-1)}(k/T_0) = 0 \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \dots, K \quad (20)$$

如果上式成立,则在以 k 次谐波频点为中心的邻域内组合余弦窗的频谱 $W(f)$ 为频偏的 n_k 阶无穷小量。

将式(14)代入式(20)给出窗系数 w_k 的方程组,其中 $W(f)$ 在 k 次谐波频点的 1~3 阶导数为 0 对应的系数方程分别为

$$1 + \sum_{m=1}^M \frac{(-1)^m}{1 - (m/kp)^2} w_m = 0 \quad (21)$$

$$1 + \sum_{m=1}^M (-1)^m \frac{1 + (m/kp)^2}{[1 - (m/kp)^2]^2} w_m = 0 \quad (22)$$

$$1 + \sum_{m=1}^M (-1)^m \cdot \frac{6[1 + 3(m/kp)^2] - (kp\pi)^2 [1 - (m/kp)^2]^2}{[6 - (kp\pi)^2][1 - (m/kp)^2]^3} w_m = 0 \quad (23)$$

进一步还可以导出 4 阶以上导数为 0 对应的窗系数方程,这里从略。

设信号含有 K 个谐波,组合余弦窗的宽度为 p 个信号预估周期,则待确定的 $K(p-1)$ 个窗系数为 $w_1, w_2, \dots, w_{p-1}, w_{p+1}, w_{p+2}, \dots, w_{2p-1}, w_{2p+1}, \dots, w_{Kp+1}, w_{Kp+2}, \dots, w_{Kp-1}$ 。根据组合余弦窗应满足的有效条件 2,与信号谐波同频的余弦分量对应的窗系数须为 0。窗系数方程的个数应该与待定的窗系数的个数相等。一般情况下,在建立窗系数方程时,一方面要提高 $W(f)$ 在各信号谐波频点连续导数为 0 的阶数,一方面又要求 $W(f)$ 在这些频点有相同的平坦性。为此,由 $W(f)$ 在各信号谐波频点的前 $(p-1)$ 阶导数为 0 列出 $p-1$ 个方程, K 个谐波频点共列出 $K(p-1)$ 个方程。

对只有部分谐波分量不为 0 的周期信号,列方程时不必要求 $W(f)$ 在所有预估谐波频点具有相同的平坦性。这种情况下,通常在信号能量较强的频点赋予较高的平坦性,在信号能量很弱或不存在的频点赋予较低的平坦性或完全不予置理。较多的窗系数意味着组合余弦窗中有更多的余弦分量可用于调控预估谐波频点的频谱平坦性,但往往以增大各预估谐波频点之间的频谱为代价,一旦信号有谐波落入这些区域就会带来较大误差。较少的窗系数虽然只能使较少预估谐波频点处的频谱平坦性得到控制,但其他频域处的频谱往往可以维持在较低的幅度,即便信号有谐波落入这些区域也能得到有效抑制。事实上,由于平坦性约束条件可以进行多种组合,适用于任一周期信号均值参数测量的最佳窗函数并不存在。实际中组合余弦窗的窗宽和窗系数的

选择应根据具体信号的谐波分布特点进行优化设计。

3 矩形卷积窗性能分析

矩形卷积窗用于周期信号均值参数测量时可以有效抑制非同步采样带来的测量误差,而且算法简单高效^[11-13]。本节基于组合余弦窗的有效条件和优化设计准则对矩形卷积窗的性能进行分析。

3.1 矩形卷积窗的时域表示

对式(5)给出的归一化矩形窗进行多重卷积,得归一化 p 重矩形卷积窗^[12]

$$r_p(t) = \underbrace{r_1(t) * r_1(t) * \cdots * r_1(t)}_{p\text{个函数}} \quad (24)$$

更一般情况,借助宽度为 1 个信号预估周期 T_0 的矩形窗

$$w_1(t) = \frac{1}{T_0} r_1(t/T_0) \quad (25)$$

定义一般情况下的 p 重矩形卷积窗为

$$w_p(t) = \underbrace{w_1(t) * w_1(t) * \cdots * w_1(t)}_{p\text{个函数}} = \frac{1}{T_0} r_p(t/T_0) \quad (26)$$

它是一个 p 周期宽、单位面积的偶函数。

3.2 矩形卷积窗的频域表示

根据卷积定理,式(26)给出的矩形卷积窗的频域表示为

$$W_p(f) = \left(\frac{\sin(\pi T_0 f)}{\pi T_0 f} \right)^p \quad (27)$$

根据频域采样定理,宽度为 pT_0 的 p 重矩形卷积窗在频域可以通过频率采样间隔为 $\Delta f = 1/pT_0$ 的频域采样进行重建

$$\begin{aligned} W_p(f) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_p\left(\frac{m}{pT_0}\right) \frac{\sin\left[(2\pi f - m2\pi/pT_0) \frac{pT_0}{2}\right]}{(2\pi f - m2\pi/pT_0) \frac{pT_0}{2}} = \\ &= \frac{\sin(\pi p T_0 f)}{\pi p T_0 f} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(m\pi/p)}{m\pi/p} \right)^p \cdot \frac{(-1)^m}{1 - (m/pT_0 f)^2} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

与式(14)对照可知,如果将矩形卷积窗理解为组合余弦窗的一种,则其对应的组合余弦窗系数为

$$w_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2 \left(\frac{\sin(m\pi/p)}{m\pi/p} \right)^p, & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (29)$$

由式(28)可知在诸谐波频点上,矩形卷积窗的频谱为 0;由式(29)可知矩形卷积窗对应的组合余

弦窗系数 w 为 1,且不存在与信号谐波同频的余弦分量(m 为 p 的整数倍时 $w_m = 0$),因此矩形卷积窗为满足均值测量有效条件的组合余弦窗。

进一步分析矩形卷积窗的傅里叶变换在周期信号预估谐波频点的平坦性, $W(f)$ 的 1 阶导数为

$$\begin{aligned} W'_p(f) &= \\ &= p(\pi T_0)^{-(p-1)} \sin^{p-1}(\pi T_0 f) \cos(\pi T_0 f) f^{-p} - \\ &\quad p(\pi T_0)^{-p} \sin^p(\pi T_0 f) f^{-(p+1)} \end{aligned} \quad (30)$$

进一步还可求出各高阶导数,不难看出 $W(f)$ 的第 1 至 $p-1$ 阶导数的各求和项中均含有 $\sin(\pi T_0 f)$ 的幂。频率 f 为 $1/T_0$ 的整数倍时 $\sin(\pi T_0 f) = 0$,因而矩形卷积窗的频谱在各信号谐波频点的 $1 \sim p-1$ 阶导数均为 0。这表明 2 重以上矩形卷积窗的 $W(f)$ 在信号的各预估谐波频点均满足平坦性(至少为 1 阶导数为 0),当频偏趋于 0 时,周期信号的均值测量误差为相对频偏的 p 阶无穷小量。

矩形卷积窗为含有无限个余弦分量的组合余弦窗,基于矩形卷积窗的均值测量信号的傅里叶变换仍由式(16)给出, k 次谐波的衰减因子为

$$\alpha_{p,k} = \frac{(-1)^{kp} \sin^p(k\pi\nu)}{k^p \pi^p (1+\nu)^p} \quad (31)$$

均值测量的标准差由式(18)给出,相对频偏趋于 0 时的近似为

$$\sigma_p(\nu) \approx |\nu|^p \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2} \quad (32)$$

4 优化组合余弦窗应用举例

实际信号可能只包含有限次的谐波分量,且信号能量在各次谐波上的分布极不平衡,如电力信号主要由奇次谐波组成。交流电有效值计算中的中间信号为交流电的平方信号,主要由偶次谐波组成。作为实例,基于优化组合余弦窗对交流电有效值的测量进行数值仿真。设被测交流电信号含有 5 项奇次谐波,即

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}U_1 \sin(2\pi ft) + \sqrt{2}U_3 \sin(\pi ft) + \\ &\quad \sqrt{2}U_5 \sin(10\pi ft) + \sqrt{2}U_7 \sin(14\pi ft) + \\ &\quad \sqrt{2}U_9 \sin(18\pi ft) \end{aligned} \quad (33)$$

其中各谐波的有效值 $U_1 = 1$ 、 $U_3 = 0.356\ 236\ 9$ 、 $U_5 = 0.213\ 742\ 1$ 、 $U_7 = 0.152\ 673\ 0$ 、 $U_9 = 0.118\ 745\ 6$,该交流电压信号的总有效值 $U = 1.1$ 。有效值对应交流电的均方根,计算中的中间信号为 $g(t) = u^2(t)$,显然该信号仅含有最高谐波次数为 18 的偶

次谐波。

信号 $u(t)$ 的有效值的加窗测量过程为,首先用窗函数对中间信号 $g(t)$ 加权求其均值,然后再计算平方根。由于 $g(t)$ 仅含偶次谐波,并考虑到随着谐波次数的提高其在直流分量处的泄漏干扰逐渐消弱,以下以窗函数的频谱 $W(f)$ 在谐波次数为 2、4、6、8、10 的频点处平坦作为构建组合余弦窗的优化条件。在该 5 个谐波频点上,通过使 $W'(f) = W''(f) = 0$ 构建 2 周期窗宽的优化组合余弦窗 WCOS2,通过使 $W'(f) = W''(f) = W'''(f) = 0$ 构建 3 周期窗宽的优化组合余弦窗 WCOS3。表 1 给出了方程(21)(22)(23)解得的窗系数。

表 1 优化组合余弦窗系数

组合系数	WCOS2	WCOS3
w	1	1
w_1	1.029 7	1.419 5
w_2	0	$4.412\ 735\times10^{-1}$
w_3	$-3.742\ 81\times10^{-2}$	0
w_4	0	$-2.312\ 33\times10^{-2}$
w_5	$7.778\ 90\times10^{-3}$	$-1.594\ 70\times10^{-3}$
w_6	0	0
w_7	$-2.667\ 80\times10^{-3}$	$-2.887\ 816\times10^{-4}$
w_8	0	$-6.975\ 976\times10^{-4}$
w_9	$1.150\ 50\times10^{-3}$	0
w_{10}	0	$1.604\ 42\times10^{-4}$
w_{11}	$-5.584\ 894\times10^{-4}$	$1.496\ 99\times10^{-5}$
w_{12}	0	0
w_{13}	$2.863\ 177\times10^{-4}$	$3.347\ 9\times10^{-6}$
w_{14}	0	$7.903\ 7\times10^{-6}$
w_{15}	$-1.469\ 544\times10^{-4}$	0
w_{16}	0	$-1.430\ 6\times10^{-6}$
w_{17}	$7.0140\ 50\times10^{-5}$	$-1.068\ 7\times10^{-7}$
w_{18}	0	0
w_{19}	$-2.572\ 70\times10^{-7}$	$-1.214\ 50\times10^{-8}$
w_{20}	0	$-1.720\ 04\times10^{-8}$
w_{21}	0	0
w_{22}	0	$4.997\ 02\times10^{-10}$

在已有的窗函数中,矩形卷积窗用于周期信号均值参数测量时的非同步误差最小,故只需将优化组合余弦窗与同宽的矩形卷积窗进行对比分析。图 1、图 2 分别给出了 2 周期窗宽的优化组合余弦窗 WCOS2、矩形卷积窗 WCON2 与 3 周期窗宽的优化

组合余弦窗 WCOS3、矩形卷积窗 WCON3 的幅度谱。可以看出,在选定的偶次谐波频点处优化余弦组合窗的频谱(实线)明显较矩形卷积窗的频谱(虚线)平坦。

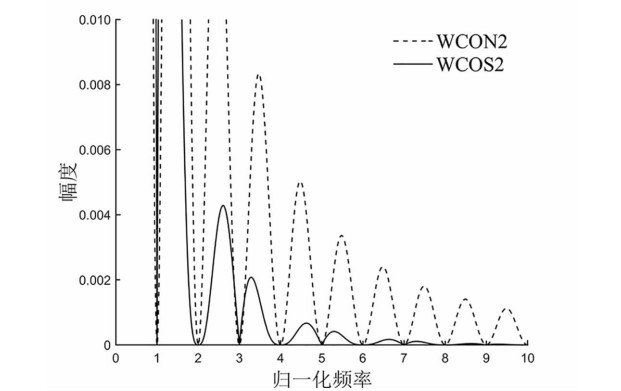


图 1 窗函数 WCOS2 与 WCON2 的幅度谱
Fig. 1 Amplitude spectra of WCOS2 and WCON2

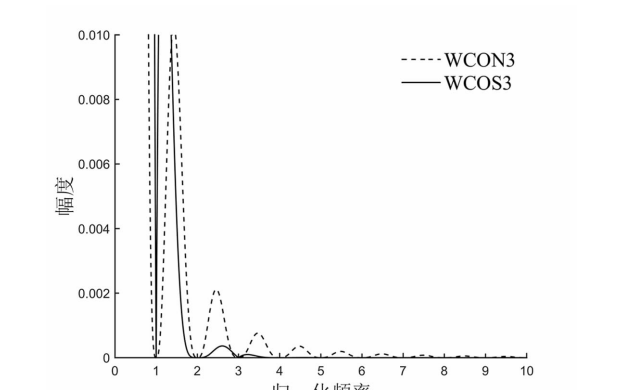


图 2 窗函数 WCOS3 与 WCON3 的幅度谱
Fig. 2 Amplitude spectra of WCOS3 and WCON3

仿真中一个预估周期内对信号采样 100 次,信号相对频偏 ν 的变化范围为 $-10\%\sim10\%$ 。图 3 为相对频偏变化时,优化组合余弦窗 WCOS2、WCOS3 和矩形卷积窗 WCON2、WCON3 用于有效值测量时的测量误差。比较 WCOS2(点线)、WCON2(实线)、WCOS3(点划线)、WCON3(虚线)可知,与同宽的矩形卷积窗相比,采用窗宽为 2 个和 3 个信号周期的优化组合余弦窗后测量精度分别提高了 11 倍和 27.5 倍以上;3 周期窗宽的优化组合余弦窗的测量精度高出 2 周期窗宽的优化组合余弦窗 40 倍以上。另外,在整个 $\pm10\%$ 的频偏范围内,WCOS2 和 WCON3 的测量精度大致相近,这是因为二者的频谱 $W(f)$ 在信号主要谐波(2、4、6、8、10 次谐波)处均有 $W'(f) = W''(f) = 0$,但当频偏较小

($\pm 1.6\%$ 之内)时,WCOS2 明显低于 WCON3 的测量精度。实际上用于均值测量的中间信号 $g(t)$ 还含有 12、14、16、18 次谐波分量,但由于 WCOS2 的频谱在这些频点并未用 $W'(f)=W''(f)=0$ 加以约束,频偏很小时这些高次谐波分量在直流分量(均值)处的干扰逐渐显露。

通过对只有奇次谐波的交流电有效值进行仿真计算表明,信号频率在较大范围($\pm 10\%$)变化时,WCOS2 和 WCON3 对应的有效值测量的相对标准差分别小于 10^{-4} 和 10^{-6} ,这说明实际中只需 2 个或 3 个信号周期的采样数据即可实现高精度测量。

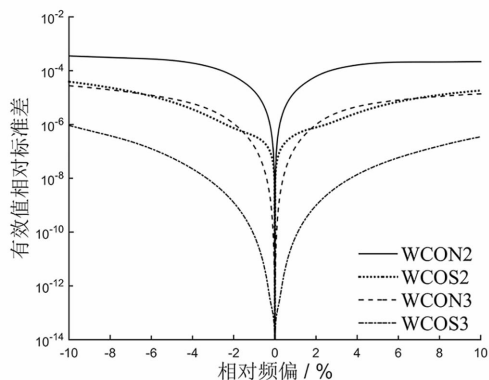


图3 有效值测量的相对标准差与相对频偏的关系

Fig. 3 Variation of relative errors of RMS with frequency

5 结 论

采样不同步是影响周期信号均值类参数测量精度的主要因素,对信号加窗能够有效抑制不同步误差。论文基于组合余弦窗并结合周期信号的谐波特性进行研究,导出了信号频率变化时均值参数测量的误差公式;基于频偏为 0 时的测量误差为 0,给出了组合余弦窗的有效条件:窗宽为信号周期的整数倍、所含余弦分量不能与信号谐波同频以及窗函数的面积为 1;提出了组合余弦窗的优化准则:窗函数的频谱在信号谐波频点应满足平坦性,也即在这些频点上窗函数频谱的 1 阶导数为 0 或连续有多阶导数为 0;基于优化设计准则建立了组合余弦窗的系数方程组,实现了适于周期信号均值测量的组合余弦窗优化设计;基于组合余弦窗分析了广泛用于周期信号分析的矩形卷积窗,导出了矩形卷积窗对应的组合余弦窗系数,说明了信号各谐波同等地位时矩形卷积窗的最优性。最后,基于优化组合余弦窗对测试信号进行了数值模拟,结果表明信号频率在较大范围($\pm 10\%$)变化时,基于优化组合余弦窗的

测量精度显著高于同宽的矩形卷积窗的测量精度。

参考文献:

- [1] 戴先中. 准同步采样及其在非正弦功率测量中的应用[J]. 仪器仪表学报, 1984, 5(4): 309-396.
DAI Xianzhong. The quasisynchronous sampling and its application in the measurement of nonsinusoidal power [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 1984, 5(4): 309-396.
- [2] 温和, 滕召胜, 曾博, 等. 基于三角自卷积窗的介损角测量算法及应用[J]. 电工技术学报, 2010, 25(7): 192-198.
WEN He, TENG Zhaosheng, ZENG Bo, et al. Dielectric loss angle measurement algorithm and application based on triangular self-convolution window [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2010, 25(7): 192-198.
- [3] 万全, 高云鹏, 罗志坤, 等. 基于 Nuttall 窗频谱校正的介质损耗因数测量[J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(1): 15-20.
WAN Quan, GAO Yunpeng, LUO Zhikun, et al. Dielectric loss factor measurement based on Nuttall window spectral correction [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010, 31(1): 15-20.
- [4] 孟卓, 温和, 李华, 等. 电压不平衡度的准同步采样快速测量方法[J]. 仪器仪表学报, 2015, 36(3): 574-583.
MENG Zhuo, WEN He, LI Hua, et al. Fast measurement method for voltage unbalance factor based on quasi-synchronous sampling algorithm [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2015, 36(3): 574-583.
- [5] FLORES-ARIAS J M, ORTIZ-LOPEZ M, QUILES LATORRE F J, et al. A memory-efficient true-RMS estimator in a limited-resources hardware [J]. Energies, 2019, 12(9): 1699.
- [6] TYAGI T, PARASURAMAN S. Finer granularity DFT bins with moving window for capacitance sensing [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2021, 17(1): 504-513.
- [7] FERRERO A, OTTOBONI R. A low-cost frequency multiplier for synchronous sampling of periodic signals [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1992, 41(2): 203-207.
- [8] KOLANKO J K. Accurate measurement of power, energy, and true RMS voltage using synchronous counting [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1993, 42(3): 752-754.

- [9] DAI Xianzhong, GRETSCH R. Quasi-synchronous sampling algorithm and its applications [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1994, 43(2): 204-209.
- [10] NUTTALL A. Some windows with very good sidelobe behavior [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1981, 29(1): 84-91.
- [11] SHUAI Zhikang, ZHANG Junhao, TANG Lu, et al. Frequency shifting and filtering algorithm for power system harmonic estimation [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2019, 15(3): 1554-1565.
- [12] ZHANG Jieqiu, LIANG Changhong, CHEN Yanpu. A new family of windows: convolution windows and their applications [J]. Science in China: Series E Engineering & Materials Science, 2005, 48(4): 468-481.
- [13] 陈砚圃, 张介秋. 周期信号均值型参数的矩形卷积窗加权测量 [J]. 探测与控制学报, 2020, 42(3): 51-56.
CHEN Yanpu, ZHANG Jieqiu. Measurement and analysis of periodic signal parameters based on rectangular convolution window weighting [J]. Journal of Detection & Control, 2020, 42(3): 51-56.
- [14] 谢航, 廖与禾, 林京. 一种含噪声多模态调频调幅信号的提取方法 [J]. 西安交通大学学报, 2012, 46(7): 93-97.
XIE Hang, LIAO Yuhe, LIN Jing. Amplitude modulation-frequency modulation multi-mode noise signal extraction by short-time Fourier transform [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(7): 93-97.
- [15] KITZIG J P, BUMILLER G. Fast-Decaying sine ramp windows for signals with limited frequency resolution [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2021, 70: 1-13.
- [16] REDDY M V, SODHI R. An open-loop fundamental and harmonic phasor estimator for Single-Phase voltage signals [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 16(7): 4535-4546.
- [17] WU Minshun, LIU Zhiqiang. Noncoherency correction algorithm for removing spectral leakage in ADC spectral test [J]. IEICE Electronics Express, 2016, 13(2): 20150991.
- [18] 付江铎, 伍民顺, 班诚, 等. 应用于高精度 ADC 频谱测试的改进加窗技术 [J]. 电子测量与仪器学报, 2020, 34(5): 9-15.
- FU Jiangduo, WU Minshun, BAN Cheng, et al. Improved windowing applied to high-precision ADC spectral test [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2020, 34(5): 9-15.
- [19] 刘冬梅, 杨重良, 何怡刚, 等. 基于 Rife-Vincent 自卷积窗三谱线插值 FFT 电力谐波分析 [J]. 电子测量与仪器学报, 2016, 30(9): 1351-1360.
LIU Dongmei, YANG Chongliang, HE Yigang, et al. Harmonic analysis of power system based on Rife-Vincent self-convolution window triple-spectral-line interpolation FFT [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2016, 30(9): 1351-1360.
- [20] 刁瑞朋, 孟庆丰. 一种衰减信号加窗频域插值算法 [J]. 西安交通大学学报, 2013, 47(7): 85-90.
DIAO Ruipeng, MENG Qingfeng. Interpolation algorithm for discrete Fourier transforms of weighted damped sinusoidal signals [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2013, 47(7): 85-90.
- [21] WEN He, LI Chengcheng, TANG Lu. Novel three-point interpolation DFT method for frequency measurement of sine-wave [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2017, 13(5): 2333-2338.
- [22] BORKOWSKI J, MROCZKA J, MATUSIAK A, et al. Frequency estimation in interpolated discrete Fourier transform with generalized maximum sidelobe decay windows for the control of power [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2021, 17(3): 1614-1624.
- [23] 张强, 王海云, 王维庆. 一种新型组合优化谐波分析方法研究 [J]. 电力系统保护与控制, 2020, 48(10): 156-163.
ZHANG Qiang, WANG Haiyun, WANG Weiqing. A new combined optimization harmonic analysis method [J]. Power System Protection and Control, 2020, 48(10): 156-163.
- [24] SALVATORE L, TROTTA A. Flat-top windows for PWM waveform processing via DFT [J]. IEE Proceedings: B Electric Power Applications, 1988, 135(6): 346-361.
- [25] RELJIN I S, RELJIN B D, PAPIC V D. Extremely flat-top windows for harmonic analysis [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2007, 56(3): 1025-1041.

(编辑 荆树蓉 刘杨)